Stručni rad
Prihvaćeno 29.12.2007.

ŽELJKO GJURANIĆ

# Modeliranje terena pomoću Delaunayjeve triangulacije

**Terrain Modelling by Using Delaunay Triangulation**

**ABSTRACT**

Delaunay triangulation is a terrain modelling procedure out of irregular set of points, such as geodetic survey. This article discusses one of the computation methods with computation theory and some practical uses. It also discusses some uses for Voronoi diagram as well as computation method.

**Key words:** Delaunay triangulation, Voronoi diagram, terrain modelling, geodetic survey

**MSC 2000:** 68W30, 86A30

**Modeliranje terena pomoću Delaunayjeve triangulacije**

**SAŽETAK**

Delaunayova triangulacija je postupak modeliranja terena iz nepravilnog skupa točaka, kao što je geodetska izmjera. U članku je prikazana jedna od metoda proračuna triangulacije s teorijskom podlogom i nekoliko primjera upotrebe. Također je navedeno nekoliko primjera uporabe Voronoijevog dijagrama, i metoda proračuna.

**Ključne riječi:** Delaunayjeva triangulacija, Voronoijev dijagram, modeliranje terena, geodetski snimak

## 1 Uvod

Prilikom projektiranja građevina, potrebno je uzeti u obzir, između ostalog, i geometriju terena na kojem će se graditi. Time se izbjegavaju troškovi suvišnih iskopa i nasipa, sanacije terena i sl. Iz tog razloga se prije projektiranja, poglavito većih građevina, naručuje geodetska izmjera postojećeg terena. Navedenom izmjerom se određuju prostorne koordinate točaka. Pojedini softverski paketi, kao što su *Autodesk Civil 3d, Bentley Powercivil i sl.*, imaju mogućnost generiranja modela terena iz niza točaka, međutim takvi paketi su znatno skuplji od klasičnih CAD alata, a često i komplicirani za uporabu.

Ovaj rad objašnjava jednu od metoda kako od izmjerenih točaka dobiti trodimenzionalni model terena iz kojeg je moguće dobiti slojnice, presjeke, količine iskopa i nasipa i sl. Poznavajući metodu moguće je napisati samostalan računalni program za generiranje modela ili nadograditi postojeći CAD alat. Dobiveni trodimenzionalni model se sastoji od trokuta koji povezuju sve točke, a postupak generiranja trokuta se naziva Delaunayjevom triangulacijom prema ruskom matematičaru Borisu Delaunayu (Boris Delone 1890-1980) [4].

## 2 Delaunayjeva triangulacija

Polazimo od pretpostavke da teren ne može imati točke na istim $x$ i $y$ koordinatama i različitoj visini. Ova pretpostavka je nužna da bi se problem triangulacije mogao svesti na ravninski. Problem triangulacije je matematički analogan problemu *konveksne ovojnice* [1] u prostoru, odnosno razvlačenju elastične membrane kroz zadane točke.

Konkretno, Delaunayjeva ravninska triangulacija je analogna problemu konveksne ovojnice točaka ravnine $xy$ projiciranih na paraboloid $z = x^2 + y^2$ paralelno s osi $z$ [1], (vidi sliku 1). Time se dobiva triangulacija s najmanje oštrih kutova, što je ujedno i optimalno rješenje.

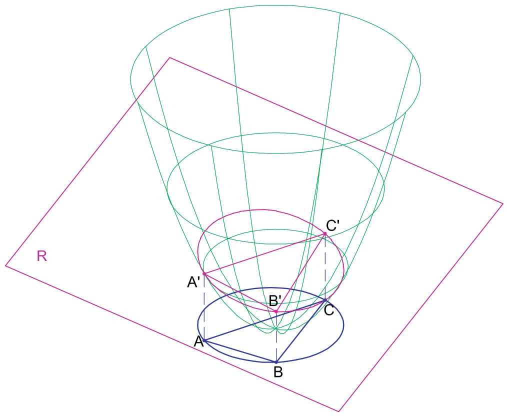
Ako proizvoljna ravnina $R$ ima jednadžbu

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

projekcija presjeka paraboloida $z = x^2 + y^2$ i te ravnine, na ravninu $xy$, ima jednadžbu

$$x^2 + y^2 = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

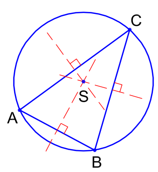
Iz jednadžbe je vidljivo da je, neovisno o presječnoj ravnini, projekcija presjeka kružnica. Budući da presjek sadrži vrhove trokuta $A'B'C'$, projekcija je upravo opisana kružnica trokuta $ABC$. Vidi sliku 1.




Slika 1: *Paraboloid presječen ravninom*

Da bi ovojnica bila konveksna, za svaki trokut $A'B'C'$ mora vrijediti da se sve zadane točke nalaze iznad ravnine trokuta. Projekcija bilo koje točke paraboloida iznad ravnine trokuta, na ravninu $xy$, nalazi se izvan presječnice paraboloida ravninom trokuta, dakle projekcija u $xy$ ravnini se nalazi izvan opisane kružnice trokuta $ABC$.

Postavljamo uvjet triangulacije: Za svaki trokut $ABC$ vrijedi da se sve zadane točke, osim $A$, $B$, i $C$, nalaze izvan opisane kružnice trokuta $ABC$. Ovim uvjetom triangulacija dobiva jedinstveno rješenje.



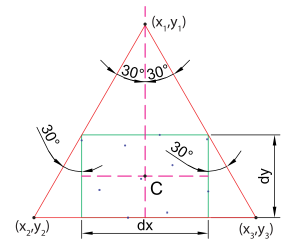

Slika 2: *Trokut s opisanom kružnicom*

## 3 *Rastući algoritam* za Delaunayjevu triangulaciju

Postoji nekoliko učinkovitih algoritama za Delaunayjevu triangulaciju, a jedan od najjednostavnijih i najbržih je tzv. *rastući algoritam* [2]. Osnova rastućeg algoritma je dodavanje točaka u postojeću mrežu. Algoritam također zahtijeva da se svaka točka koja se dodaje u mrežu nalazi unutar gabarita postojeće mreže. Dakle, početna mreža se definira kao trokut, unutar kojeg se nalaze sve zadane točke. Ovako dobivena triangulacija ima 3 točke više od zadanih, te je na kraju potrebno izbrisati sve trokute koji sadrže bilo koju od te 3 točke.

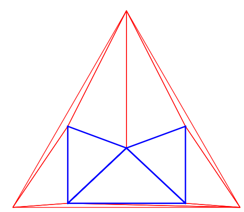
Numerički najpovoljniji trokut, koji sadrži sve točke, je istostraničan. Ako definiramo pravokutnik koji sadrži sve zadane točke sa stranicama $dx$ i $dy$ i točkom $C(C_x, C_y)$ kao središtem pravokutnika, možemo odrediti koordinate vrhova istostraničnog trokuta opisanog pravokutniku:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= C_x & y_1 &= C_y + \frac{dy}{2} + \frac{dx}{2\cdot\tan 30^\circ}\\
x_2 &= C_x - \frac{dx}{2} - dy\cdot\tan 30^\circ & y_2 &= C_y - \frac{dy}{2}\\
x_3 &= C_x + \frac{dx}{2} + dy\cdot\tan 30^\circ & y_3 &= C_y - \frac{dy}{2}.
\end{aligned}
$$

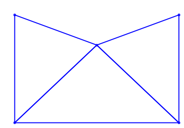



Slika 3: *Jendakostraničan trokut opisan pravokutniku*

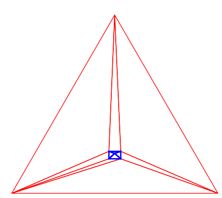
Ovako smo dobili najmanji istostraničan trokut koji sadrži pravokutnik opisan točkama. Međutim, prilikom triangulacije se mogu pojaviti konkavni vanjski rubovi mreže, zbog čega se preporučuje definirati znatno veći trokut od minimalno potrebnog (barem 10 puta).



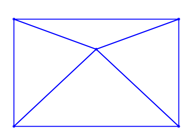
Slika 4: *Trokut* 10% *veći od minimalnog*



Slika 5: *Neispravna triangulacija*



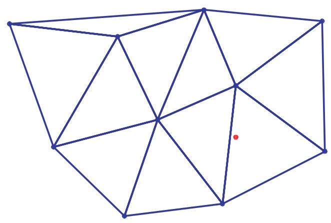
Slika 6: *Trokut 10 puta veći od minimalnog*



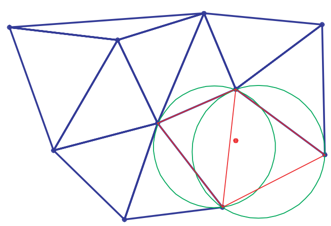
Slika 7: *Ispravna triangulacija*

Dodavanje točke se vrši na sljedeći način:

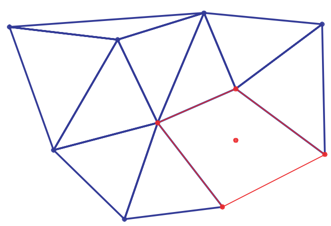
Prvo se provjeri koje je trokute potrebno ukloniti, a to su oni unutar čijih se opisanih kružnica nalazi točka koju treba dodati u mrežu (vidi sliku 9). Nakon uklanjanja trokuta iz mreže, točka se nalazi unutar poligona čiji broj stranica ovisi o broju i međusobnom položaju uklonjenih trokuta (vidi sliku 10). Novi trokuti koji se dodaju u mrežu sadrže po jednu stranicu navedenog poligona, i točku koju treba dodati (vidi sliku 11). Postupak se ponavlja za sve zadane točke i tako se dobije konačna mreža prikazana na slici 11.



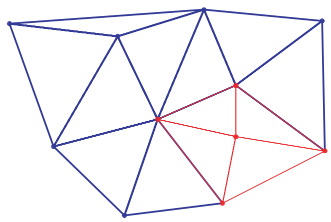
Slika 8: *Mreža u koju treba dodati točku*



Slika 9: *Trokuti koji se brišu*



Slika 10: *Trokuti izbrisani*



Slika 11: *Dodana točka*

Algoritam, napisan u pseudo kodu, izgleda ovako:

```
For i = 0 do broj_točaka
For j = 0 do broj_trokuta
If tocka_i unutar opisane kružnice trokuta_j
dodaj_rubove_trokuta_j_u_tablicu
briši_trokut_j_iz_mreže
End If
Next j
For j = 0 do broj_rubova ’ broj rubova u
tablici
For k = j do broj_rubova
If rub_j = rub_k
briši_rub_j_iz_tablice
briši_rub_k_iz_tablice
End If
Next k
Next j
’ U tablici su ostali vanjski rubovi poligona
For j = 0 do broj_rubova
dodaj_trokut-rub_j-točka_i
Next j
Next i
```

Ukoliko se izvodi na prosječnom računalu, ovaj algoritam je dovoljno brz za većinu primjena - triangulacija 10.000 točaka traje svega nekoliko sekundi. Međutim u slučaju posebnih potreba, npr. izvođenje na ručnom računalu, vrlo velik broj točaka (nekoliko milijuna) ili potreba za iterativnim postupkom, moguće je da izvođenje traje predugo za praktičnu uporabu. Postoje tri vrlo jednostavne metode ubrzavanja algoritma:

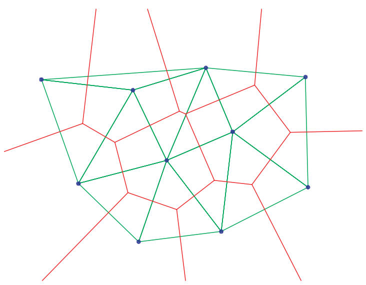
1. Memorirati uz svaki trokut koordinate središta i radijus opisane kružnice, da se izbjegne ponovno proračunavanje za svaki korak.
2. Sortiranje točaka po jednoj osi - smanjuje broj provjera.
3. Definirati sve trokute u istom smjeru, pa će rubovi koji se preklapaju u tablici uvijek biti okrenuti suprotno jedan drugom.

## 4 Voronoijev dijagram

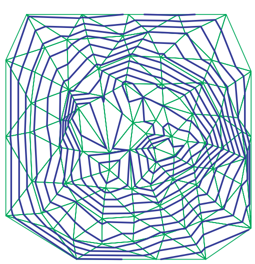
Rješavanjem Delaunayjeve triangulacije ujedno je riješen još jedan problem, a to je Voronoijev dijagram [3] (ruski matematičar Georgi Voronoi 1868-1908).

Za niz točaka u ravnini, Voronoijev dijagram prikazuje područja kojima je pojedina točka najbliža. Dobiva se spajanjem središta opisanih kružnica trokuta, odnosno sastoji se od simetrala stranica trokuta Delaunayjeve triangulacije. Voronoijev dijagram ima široku primjenu u više grana djelatnosti:

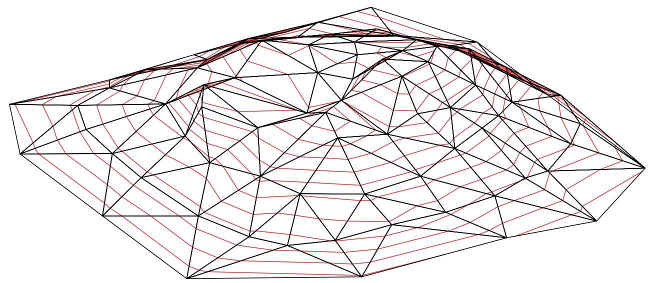
- Urbanizam - definiranje položaja važnih objekata.
- Cestogradnja - izbjegavanje prepreka.
- Gradnja velikih postrojenja - pronalaženje idealne lokacije.
- Arheologija - područja utjecaja skupina životinja.
- Biologija - površine tla koje koriste pojedine biljke, transport kisika u stanice.



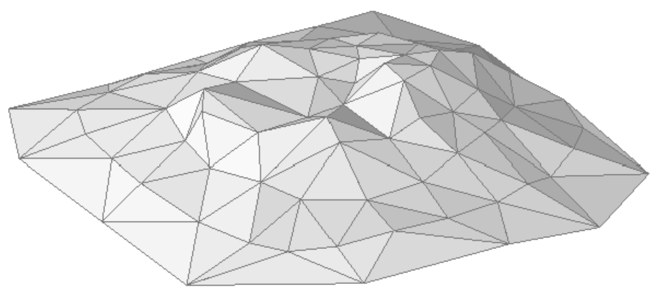
Slika 12: *Voronoijev dijagram*



Slika 13: *Model terena sa slojnicama*



Slika 14: *Trodimenzionalni prikaz modela terena sa slojnicama*



Slika 15: *Osjenčani prikaz modela terena*

## Literatura

[1] *Computing a Delaunay triangulation*, `http://www.jouy.inra.fr/unites/miaj/public/vigneron/cs4235/l10cs4235.pdf`

[2] *Efficient Triangulation Algorithm for Constructing the Model Surface from the Interpolation of Irregularly-Spaced Laser Scanned Dana*, `http://ieg.or.kr/abstract/P080307.PDF`

[3] *Delaunay triangulation*, `http://en.wikipedia.org/wiki/ Delaunay triangulation`

[4] *Boris Delaunay*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Boris_Delaunay`

**Željko Gjuranić**

Hrvatske telekomunikacije d.d.

Savska cesta 32, 10000 Zagreb

e-mail: Zeljko.Gjuranic@t.ht.hr