Professionelle Arbeit
Angenommen am 20.12.2007.

HANS GÜNTHER KOPETZKY
HANS SACHS

Quadratische Kegel und AutoCAD

Quadratic Cones and AutoCAD

ABSTRACT

Oblique circular cones and quadratic cones are discussed mainly with respect to implementations in Computer Algebra systems and CAD systems especially AutoCAD.

Key words: quadratic cones, oblique circular cones, elliptic cones

MSC 2000: 65D17

Stošci 2. stupnja i AutoCAD

SAŽETAK

Raspravlja se o kosim kružnim stošcima i stošcima 2. stupnja, uglavnom s obzirom na izvedbu u računalnim algebarskim i CAD sistemima, posebno AutoCAD-u.

Ključne riječi: stožac 2. stupnja, kosi kružni stožac, eliptički stožac

Bekanntlich existieren im dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 bezüglich der 6-parametrigen euklidischen Bewegungsgruppe genau zwei Typen von quadratischen Kegeln: Schiefe Kreiskegel und Drehkegel (vgl. [3] p.158f). Gibt man also als Leitkurve einen Kegelschnitt vor und wählt eine Kegelspitze $S \notin \alpha$, so läßt sich der Verbindungskegel von S mit ℓ stets als *schiefer Kreiskegel* erzeugen.

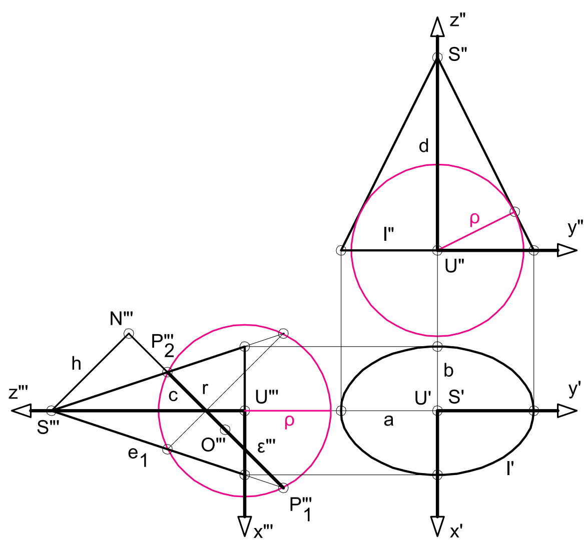
Wir verstehen nun unter einem *elliptischen Kegel* einen Kegel mit elliptischer Leitkurve ℓ, dessen Kegelspitze S auf einer Normalen durch den Ellipsenmittelpunkt U auf die Trägerebene α von ℓ liegt (vgl. die Abbildung).

Schiefe Kreiskegel spielen in der Technik eine wichtige Rolle (vgl. z.B. [2]). Umso erstaunlicher ist es, daß z.B. in AutoCAD (zumindest bis zur Version 2007) keine Möglichkeit besteht *schiefe Kreiskegel* als *Solids* zu erzeugen; das Programm erlaubt nur die Konstruktion von Drehkegeln und elliptischen Kegeln. Zwar lassen sich schiefe Kreiskegel als verbindende Regelfläche zwischen einem Punkt S und einem Leitkreis ℓ mit diesem Programm als *Oberflächenmodelle* herstellen, doch bieten diese Objekte wenig Bearbeitungsmöglichkeiten, insbesondere z.B. keine Boole'schen Verknüpfungen oder ähnliche Operationen.

In dieser Arbeit wird mittels einfacher mathematischer Methoden die Erzeugung eines schiefen Kreiskegels für eine Computerimplementation hergeleitet.

Ein schiefer Kreiskegel mit dem Leitkreis k (Mittelpunkt O, Radius r) Trägerebene ε und der Spitze S (vgl. Kreuzriss in der Abbildung) kann wie folgt festgelegt werden: Man bestimmt die Normalprojektion N von S auf ε und misst die beiden Abstände $h = \overline{SN}$ und $c = \overline{ON}$. Die Größe h ist die *Kegelhöhe*, c soll *Zentralabstand* heißen. Durch $\{r, c, h\}$ ist der Kreiskegel bis auf eine unwesentliche Spiegelung *eindeutig* festgelegt.

Für unsere Untersuchungen gehen wir nun von einem elliptischen Kegel Γ aus (vgl. die Abbildung), wobei die Leitellipse ℓ in der xy-Ebene liegt und die Halbachsenlängen a und b, $a > b$ besitzt; die Höhe von Γ sei $d = \overline{US}$, wobei U der Ellipsenmittelpunkt ist.



Hauptrisse eines elliptischen Kegels

Zur Ermittlung der Kreisschnittebenen von Γ verwenden wir gemäß [3], p.249f eine Hilfskugel κ mit dem Mittelpunkt U, welche die Umrisserzeugenden von Γ im Aufriss berührt. Wie aus [4] p.179 bekannt, zerfällt dann die Schnittkurve von Γ mit der Kugel κ in zwei Kurven zweiter Ordnung, die als Kurven auf κ somit Kreise sein müssen. Wir bezeichnen mit ρ den Radius dieser Hilfskugel.

Man findet unschwer

$$\rho = ad/\sqrt{a^2+d^2}\,, \tag{1}$$

und als Gleichung von Γ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(1-\frac{z}{d}\right)^2. \tag{2}$$

Schneidet man Γ mit der Ebene $y=0$, so ergeben sich die beiden Umrisserzeugenden e_1 und e_2 für den Kreuzriss zu

$$x = \pm b\,(1-z/d) \tag{3}$$

und diese liefern im Schnitt mit dem Umriss der Kugel κ bezüglich des Kreuzrisses nach einigen Rechnungen vier Punkte von denen lediglich zwei benötigt werden. Die beiden anderen Punkte ergeben sich aus einer Spiegelung um die z-Achse. Zwei der benötigten Punkte sind z.B.

$$P_1\left(\frac{d^2b(1+W)}{b^2+d^2}\,,0\,,\frac{d(b^2-d^2W)}{b^2-d^2}\right), \tag{4a}$$

$$P_2\left(\frac{-d^2b(1-W)}{b^2+d^2}\,,0\,,\frac{d(b^2+d^2W)}{b^2+d^2}\right), \tag{4b}$$

wobei als Abkürzung

$$W := \sqrt{(a^2-b^2)/(a^2+d^2)} \tag{5}$$

verwendet wurde. Diese Punkte legen eine der *reellen Kreisschnittebenen* fest (vgl. die Abbildung). Die zweite würde sich natürlich aus den gespiegelten Punkten ergeben. Aus (4a) und (4b) erhält man als Gleichung der drittprojizierenden Kreisschnittebene

$$z = -\frac{d}{b}Wx+\frac{da^2}{a^2+d^2}\,. \tag{6}$$

Als Nächstes muss der Mittelpunkt O des Schnittkreises k von Γ mit ε, der Radius r von k, der Zentralabstand c und die Kegelhöhe h berechnet werden. Für O erhält man

$$O\left(\frac{d^2bW}{b^2+d^2}\,,0\,,\frac{db^2}{b^2+d^2}\right). \tag{7}$$

Wir verwenden noch die Abkürzung

$$Q := 1/\sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)}\,. \tag{8}$$

Aus (7) folgt dann mittels (4a)

$$r = ad^2Q\,. \tag{9}$$

Für den Normalenfußpunkt N gewinnt man nach einigem Rechnen die Koordinaten

$$N\left(-\frac{d^4bW}{a^2(b^2+d^2)}\,,0\,,\frac{da^2b^2+d^3(a^2-b^2)}{a^2+d^2}\right), \tag{10}$$

woraus sich $c=\overline{ON}$ bestimmen lässt zu

$$c = (d^2Q/a)\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+d^2)}\,. \tag{11}$$

Schließlich ergibt sich $h=\overline{SN}$ aus $S(0,0,d)$ und wieder aus (10) als

$$h = d^3bQ/a\,. \tag{12}$$

Zur Lösung der geometrischen Fragestellung muss das Gleichungssystem (9), (11) und (12) nach a, b und d aufgelöst werden. Dazu eliminieren wir als erstes die Größe Q aus den Gleichungen (11) und (12) mit Hilfe der Beziehung $Q=r/ad^2$ aus (9), quadrieren um die Wurzel in (11) zu vermeiden und erhalten unmittelbar aus (11) und (12) nach Division durch d^4 die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{a^2}{d^2}\right)^2 c^2 = \left(\frac{a^2}{d^2}-\frac{b^2}{d^2}\right)\left(\frac{a^2}{d^2}+1\right)r^2\,, \tag{13a}$$

$$\left(\frac{a^2}{d^2}\right)^2 h^2 = \left(\frac{b^2}{d^2}\right)^2 r^2\,. \tag{13b}$$

Setzt man nun

$$x := a^2/d^2 \quad \text{und} \quad y := b^2/d^2\,, \tag{14}$$

so erhalten wir schließlich die Gleichungen

$$c^2x^2 = r^2(x^2-xy+x-y)\,, \tag{15a}$$

$$h^2x^2 = r^2y\,, \tag{15b}$$

Durch Elimination von y erhält man eine kubische Gleichung in x. Nach Ausscheiden der uninteressanten Lösung $x=0$ hat man als Lösungen der verbleibenden quadratischen Gleichung mit $q=c^2+h^2-r^2$ dann

$$x_{1,2} = (-q\pm\sqrt{q^2+4h^2r^2})/2h^2\,, \tag{16}$$

wobei das positive Vorzeichen zu wählen ist. Aus (14) und (15b) lassen sich sofort a/d und b/d bestimmen zu

$$\frac{a}{d}=\sqrt{x} \quad \text{und} \quad \frac{b}{d}=\frac{h}{r}x\,, \tag{17}$$

wenn x nun die Lösung mit positivem Vorzeichen bei der Wurzel bedeutet.

Um d explizit zu bestimmen verwenden wir (8) und (12) und erhalten

$$d = \frac{1}{Qd^2}\frac{a}{b}h. \tag{18}$$

In diesem Ausdruck ist bereits alles bekannt, d kann daher sofort berechnet werden. Ausgedrückt durch die Lösung x erhält man

$$d = \sqrt{(x+1/x)(h^2x^2+r^2)}, \tag{19}$$

und dann mit Hilfe von (17) sofort auch a und b.

Für die praktische Konstruktion mittels AutoCAD ist zunächst der dem schiefen Kreiskegel zugeordnete elliptische Kegel zu bestimmen und dieser sodann mit der Kreisschnittebene ε zu schneiden. Die Gleichung von ε ist gegeben durch die Beziehung (6), woraus sich für den Neigungswinkel σ von ε gegen die xy-Ebene mit W aus (5) die Formel

$$\tan\sigma = -\frac{d}{b}W = -\frac{d}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+d^2}} \tag{20}$$

ergibt. Dieser *Kippwinkel* σ wird benötigt um die Basisfläche des schiefen Kreiskegels parallel zur xy-Ebene drehen zu können.

Zur praktischen Durchführung werden zunächst also die Werte $\{a,b,d\}$ *berechnet* und der zugeordnete elliptische Kegel Γ z.B. als Solid dargestellt. Die weiteren Konstruktionen ergeben sich dann aus der Abbildung und den Beschreibungen und sollten für jemand, der einigermaßen mit den Grundkonstruktionen in AutoCAD vertraut ist unter Verwendung geeigneter Benutzerkoordinatensysteme keine Probleme mit sich bringen.

Zu bedenken ist aber Folgendes. Da die Berechnung von $\{a,b,d\}$ nicht zu vermeiden ist, kann man auch die Punkte P_1 und P_2 mit (4a) und (4b) direkt *berechnen* um sich aufwändigere Konstruktionen zu ersparen. Die Punkte werden dann mit Koordinaten eingegeben. Einen dritten Punkt von ε erhält man dann aus P_1 durch Änderung der y-Koordinate. Diese Möglichkeit ist auch deshalb interessant, weil sich unsere Kegelkonstruktion mit einer der internen Programmiersprachen von AutoCAD in einfacher Weise implementieren lässt, sodass die Erstellung eines schiefen Kreiskegels dann durch einen eigenen Befehl aufrufbar wird.

Literatur

[1] AUTODESK, INC: AutoCAD Benutzerhandbuch, www.autodesk.de

[2] HOHENBERG, F.: *Konstruktive Geometrie in der Technik*, Springer Verlag, Wien 1966

[3] KOMMERELL, K.: *Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes*, K.F.Koehler Verlag, Stuttgart 1950

[4] WUNDERLICH, W.: *Darstellende Geometrie I*, B.I.Hochschultaschenbücher, Bd. 96/96a, Mannheim, Wien, Zürich 1966

Hans Günther Kopetzky
e-mail: kopetzky@unileoben.ac.at
Hans Sachs
e-mail: sachs@unileoben.ac.at

Lehrstuhl für Angewandte Geometrie
Montanuniversität Leoben
A-8700 Leoben, Österreich