

Übersichtsartikel
Angenommen am 15.10.2008.

GUNTER WEISS
FRANZ GRUBER

Den Satz von THALES verallgemeinern - aber wie?

Herrn Prof. Dr. Hellmuth Stachel zum 65. Geburtstag gewidmet.

How to generalize Thales' Theorem?

ABSTRACT

The classical theorem of Thales can be generalized – depending on someones interpretation – in several elemental or abstract ways. This paper tries to classify such generalizations without claim of completeness. We structured this work in a way that is suitable for educational purposes by emphasizing aspects of mathematical research. Beside more or less known facts, we present new insights and approaches to one of the most important theorems of geometry.

Key words: Thales' Theorem 3D, constrained motions, spatial kinematics, trihedron

MSC 2000: 51M04

Kako poopćiti Talesov teorem?

SAŽETAK

Klasičan Talesov teorem moguće je poopćiti – ovisno o interpretaciji – na nekoliko elementarnih i apstraktnih načina. U ovom se radu pokušava, ne zahtijevajući potpunost, klasificirati te generalizacije. Svojom strukturom rad je prilagođen obrazovnim svrhama s naglasakom na matematičkom istraživanju. Uz više ili manje poznate činjenice, predstavljamo nove uvide i pristupe jednom od najznačajnijih teorema geometrije.

Ključne riječi: Talesov 3D teorem, ograničeno gibanje, prostorna kinematika, trobrid

1 Der klassische Satz von Thales

Schlampig formuliert lautet er so:

“Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter.”

Formulierungen dieser Art überleben, ebenso wie “der Pythagoras”, die Vergessensjahre nach dem Ende der schulischen Ausbildung bis ins hohe Alter. Man sollte sich als Lehrer die Zeit nehmen, wissensunbelastete Schüler im Elternhaus nach dem Satz von Thales fragen zu lassen und die gesammelten Antworten inhaltlich statistisch auswerten! Anschließend könnte man auf die Diskrepanz zwischen Gesagtem und Gemeintem hinweisen (vgl. Abb 1(a)) und so zur Schärfung des Sprachvermögens der Schüler beitragen. Übrigens kann man sich auch aus Spaß gleich an die Umkehrung des unscharf formulierten Thales-Satzes machen, die dann zu folgendem Statement Anlass gäbe (vgl. Abb. 1(b), [15]):

“Jeder Rechte ist ein Winkel im Halbkreis!”

- was offensichtlich so nicht stimmt.

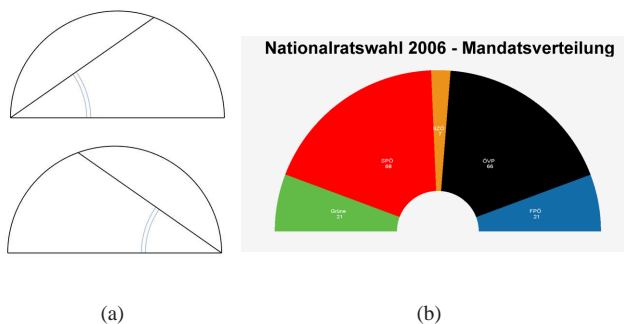


Abbildung 1: Beispiel eines linken bzw. rechten Winkels im Halbkreis (a) und “Satz-Umkehrung” (b)

Wie ist also der Satz zu formulieren, dass er dem (üblicherweise richtig) Gemeintem, Abb.2, entspricht?

(T1) “Sind A und B Durchmesser-Endpunkte eines Kreises k und ist S ein (von A und B verschiedener) Kreispunkt, so ist der Winkel $\angle ASB$ ein rechter, sein Winkelmaß $\sphericalangle ASB$ also $\pi/2$ oder 90° .”

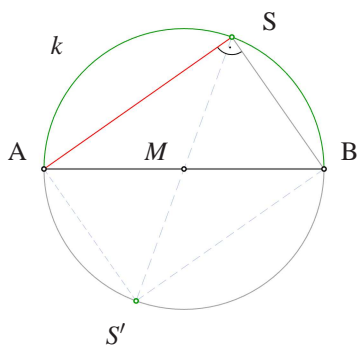


Abbildung 2: Der Satz von Thales mit Ergänzungen für einen Beweis

Beweis etwa durch Punktspiegelung von S am Mittelpunkt M von k , (vgl. auch [19]): Das entstehende Viereck $\{ASBS'\}$ besitzt gleich lange Diagonalen (Kreisdurchmesser) mit gleichem Halbierungspunkt. Es ist also ein Rechteck.

Menschen denen “genau dann” - Formulierungen - noch oder schon wieder - fremd sind, werden aus dem obigen Beweis intuitiv bereits die Umkehrung des Satzes (T1) mitnehmen und keine Beweisnotwendigkeit mehr verspüren: S nicht auf $k \Rightarrow$ Diagonalen von $\{ASBS'\}$ ungleich lang, aber gemeinsame Mitte M , \Rightarrow kein Rechteck, sondern schiefes Parallelogramm. Eh klar! Und trotzdem muss man beim expliziten Formulieren der Umkehrung fast immer helfen:

(T2) “Ist $\triangle ASB$ ein rechtwinkeliges Dreieck mit Hypothenuse $[A,B]$, so geht der Kreis mit Durchmesserstrecke $[A,B]$ durch S .”

Über die Limesfigur in der Grenzlage $S \rightarrow A$ oder $S \rightarrow B$ wird man bis zur 9.Schulstufe vielleicht noch nicht reden wollen und können. Ein Grund mehr, den Satz in der (gymnasialen) Oberstufe wieder hervor zu holen und an entsprechende Lehrplaninhalte (Vektorrechnung, Differentialrechnung) zu koppeln.

Erarbeitet man mit Schülern den Satz von Thales, so werden bestimmt auch kinematische Formulierungen kommen:

(T3) “Gleiten die Schenkel eines Rechtwinkelhakens durch zwei feste Punkte A und B , so durchläuft der Scheitel S einen (Halb-) Kreis k über dem Durchmesser $[A,B]$ ”

Der so erklärte “Thales-Zwangslauf” ist die Umkehrung einer Ellipsenbewegung, wie sie bekanntlich durch einen klassischen Ellipsenzirkel repräsentiert wird.

(T4) “Gleitet der Scheitel S eines Rechtwinkelhakens entlang eines Kreises k und ein Winkelschenkel durch einen

festen Punkt A von k , so umhüllt der zweite Winkelschenkel den A gegenüberliegenden Punkt B (Gegenpunkt) von k .”

Diese Formulierungen werden zum Ausgangspunkt für sehr unterschiedliche Verallgemeinerungen, von denen einige den Schulstoff weit hinter sich lassen. Dies gilt im gleichen Maße auch für die folgende Version des Thales-Satzes:

(T5) “Fällt man auf die Geraden a eines Büschels mit Scheitel A aus einem Punkt $B \neq A$ die Normalen b , so erfüllen die Schnittpunkte S zugeordneter Geraden a und b einen Kreis k mit Durchmesser $[A,B]$.”

Bei dieser Auffassung sind die Sonderlagen $S = A$ und $S = B$ in natürlicher Weise miteinfasst. Inhaltlich mit (T5) ident, aber in eine andere Verallgemeinerungsrichtung führend, ist folgende Formulierung:

(T6) “Die Fußpunktkurve eines Geradenbüschels $\{a \mid A \in a \subset \pi; A, \pi \text{ fest}\}$ für einen festen Punkt $B \in \pi, (B \neq A)$, als Pol ist ein Kreis k , der Thaleskreis über $[A,B]$.”

2 Grundidee der Verallgemeinerung des Satzes von Thales

Die klassische, ebene Figur besteht aus Punkten A, B , einem Kreis oder Halbkreis k mit den Gegenpunkten A, B und dem Winkelscheitel S mit den Schenkeln SA und SB , die zu einander normal sind. Wir werden daher (T1) in verschiedene, zum Teil völlig unabhängige Richtungen verallgemeinern können.

Verzichtet man auf Rechtwinkeligkeit der Winkelschenkel unter Beibehaltung der übrigen Elemente, gelangt man zur bekannten Aussage des “Peripheriewinkelsatzes”. Wir werden diesen Verallgemeinerungsstrang hier nicht weiter verfolgen.

3 Sphärische Version des Satzes von Thales

Es ist nahe liegend, zunächst das Wort *klassisch*, das i.w. *euklidisch* meint, durch “nicht-euklidisch” zu ersetzen. Auch diesen Verallgemeinerungsstrang werden wir hier nicht im Detail verfolgen, sondern nur den der elementaren Anschauung zugänglichen sphärischen Fall untersuchen, der ja die elliptische ebene Geometrie repräsentiert. Es ist dabei zunächst zweckmäßig, von (T5) auszugehen und sinngemäß die geradlinigen Winkelschenkel zu Großkreisbogen abzuändern.

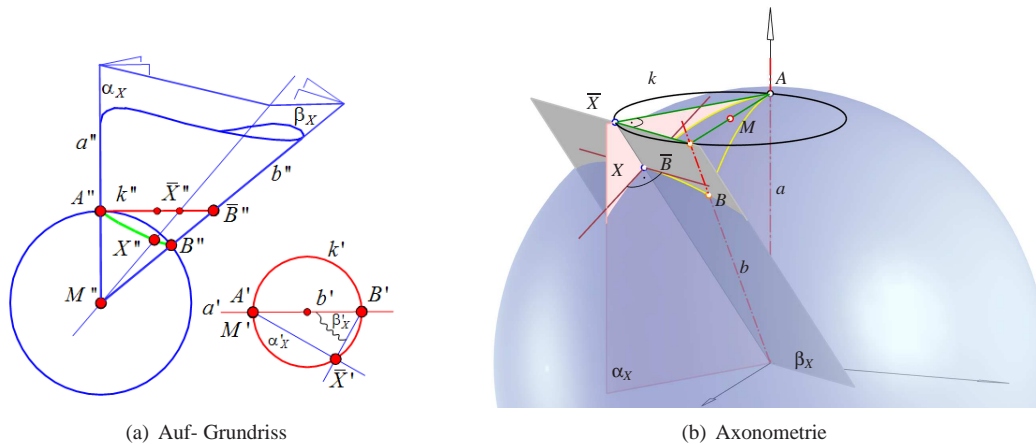


Abbildung 3: Konstruktion der Scheitel-Ortslinie für den sphärischen Satz von Thales

Zur sphärischen Konstruktion der Ortslinie des Scheitels S werden die Angabeelemente A und B aus dem Kugelmittelpunkt M auf die Tangentialebene π in A projiziert. Das Orthogonalstehen der Winkelschenkelbogen a und b durch A bzw. B reproduziert sich dabei in orthogonalen Ebenen um MA und MB , deren Spuren in π gleichfalls rechtwinklig sind und demnach dort einen gewöhnlichen Thaleskreis k' erzeugen. M verbunden mit k' ist also ein "orthogonaler (Kreis-) Kegel" Γ , denn seine Kreisschnittebene π ist normal zu einer seiner Erzeugenden, nämlich zu MA . Die gesuchte Ortslinie k ist demnach (ein Ast der) Schnittkurve dieses orthogonalen Kegels Γ mit der Kugel und somit eine Kurve 4. Ordnung, ein "sphärischer Kegelschnitt" (Abb.3).

Der Kegel $\Gamma := M \vee k'$ erfüllt die Gleichung

$$x^2 + y^2 - \tan(2\alpha)yz = 0 \tag{1}$$

Wir verwenden dabei M als Ursprung, MA als z -Achse und MAB als yz -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems mit $\overline{MA} = 1$ und α messe den halben Winkel $\sphericalangle AMB$. Hieraus folgt, dass der Aufriss k'' der gesuchten Thales-Kurve k auf einer Hyperbel h mit Mitte M liegt, deren Asymptoten durch die Normalen zu MA bzw. MB repräsentiert sind. Die halbe Hauptachsenlänge von h ist dabei $\frac{1}{2} \sin(2\alpha)$, sodass sich für den halben Nebenachsenbogen β von k die Länge

$$\sin \beta = \tan \alpha \quad \text{bzw.} \quad \beta = \arcsin(\tan \alpha) \tag{2}$$

ergibt (Abb.4(a)). Man beachte, dass stets $\alpha < \beta$ gilt und dass ein klassisch "elliptisches" Erscheinungsbild von k nur für $2\alpha < 90^\circ$ auftritt. Für $\alpha = 90^\circ$ zerfällt k in zwei Kreisbögen in Ebenen normal zur Symmetrieebene MAB .

Für $2\alpha > 90^\circ$ ist einer der Punkte A oder B durch seinen Gegenpunkt zu ersetzen (Abb.5).

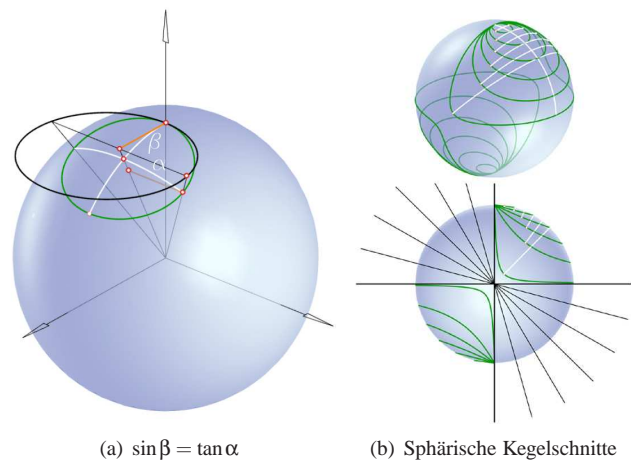


Abbildung 4: Illustrationen zu (ST1)

(ST1) Sphärischer Thales-Satz: Der Ort der Scheitel sphärischer rechter Winkel, deren Schenkelbogen durch zwei Kugelpunkte A und B (B nicht Gegenpunkt von A) gehen, ist ein sphärischer Kegelschnitt mit dem Achsbogen $[A, B]$. Hat $[A, B]$ die sphärische Länge 2α , so ist die zweite Achse von der Länge $2\beta = 2 \arcsin(\tan \alpha)$. Würde man von der kinematischen Auffassung (T4) ausgehen, so ist auch folgende Idee ganz natürlich und auf die Kugel verallgemeinerbar:

(T4*) Gleitet in der euklidischen Ebene ein Rechtwinkelhaken (S, a, b) mit seinem Scheitel S längs eines Kreises k , während sein Schenkel a durch einen festen Punkt A gleitet, so umhüllt der Schenkel b i.A. eine Kurve 2. Ordnung k_b (Kegelschnitt), die "Anti-Fußpunktcurve" von k bezüglich des Pols A . Diese Kurve degeneriert in einen Punkt B genau für A aus k .

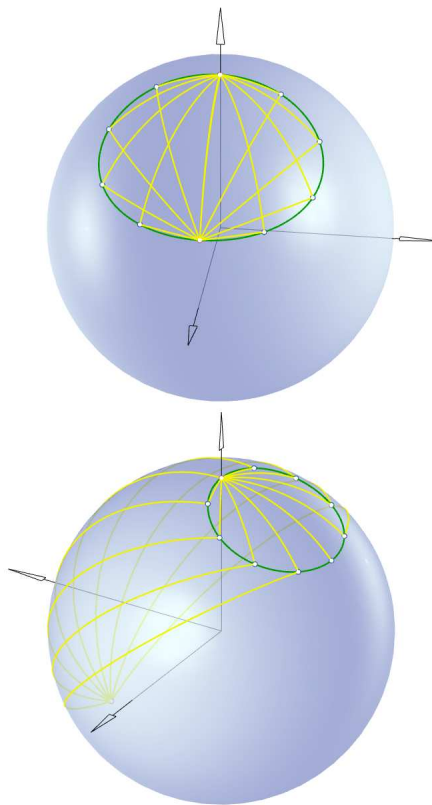


Abbildung 5: Sphärischer Satz von Thales $2\alpha \leq 90^\circ$

Diese elementare Verallgemeinerung des Thales-Satzes (vgl. Abb. 6) ist mit Mitteln der analytischen Geometrie oder der ebenen Kinematik explizit zu erfassen.

Die sphärische Version dieses Satzes ist vom Rechen- und Beweisaufwand schwieriger. Auch hier das Ergebnis natürlich eine Anti-Fusspunktcurve. Das Hüllgebilde von b wird wegen (ST1) i.A. sicher nicht kreisförmig oder gar punktförmig ausfallen können! (Im Sonderfall, dass A Mittelpunkt von k ist, stimmt k_b mit k überein, ist also doch kreisförmig.)

4 Räumlich elementare Verallgemeinerungen des Satzes von Thales

Ersetzt man bei den Grundbegriffen das Wort “eben” durch “räumlich” und behält alle übrigen Elemente bei, so ergibt die Drehung um die Durchmessergerade AB von k als Scheitelort von rechten Winkeln eine Kugel:

(T1') Sind A, B Durchmesserendpunkte einer Kugel K^2 und ist S ein von A und B verschiedener Kugelpunkt, so ist

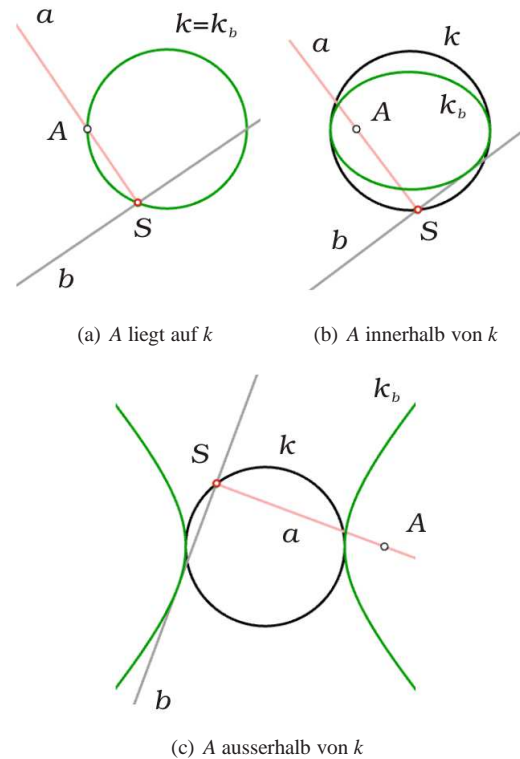


Abbildung 6: Antifusspunktcurven / Illustrationen zu Satz (T4')

$\angle ASB$ ein rechter Winkel. Umgekehrt, ist ΔAPB ein rechtwinkeliges Dreieck, dann gehört P der Kugel K^2 an.

Es ist naheliegend dass die Aussage auch für die Hyperkugel K^{d-1} im d -dimensionalen euklidischen Raum ($d \geq 2$) gelten muss, wobei $d = 2$ verwendete Beweisidee unmittelbar brauchbar bleibt.

Die Erweiterung des Schauplatzes auf (euklidische) Räume E^n höherer Dimension n erlaubt auch die dimensionsmäßige Verallgemeinerung der am Satz von Thales beteiligten Elemente: Es können statt Punkten A, B Unterräume A^k bzw. B^l verwendet werden und statt der Winkelschenkel a und b orthogonale und gemeinsam ganz E^n aufspannende Unterräume $\alpha^{k+i}, \beta^{l+j}$ durch A^k bzw. B^l . Der Schnittort zugeordneter “Schenkel-Räume” ist dann i.A. eine orthogonale Hyperquadrik oder ein orthogonaler Kegel, ein Rotationszylinder oder eine Hyperkugel. Für $n = 3$ sind die interessantesten unter den möglichen Fällen in den folgenden Figuren (Abb. 7) dargestellt. Wir wollen Ergebnisse höherdimensionaler Verallgemeinerungen im Folgenden mit (nD-Ti) kennzeichnen. Somit sind Aussagen, die das Erzeugnis orthogonaler Unterräume mit der Bezeichnung (nD-T5) zusammenzufassen.

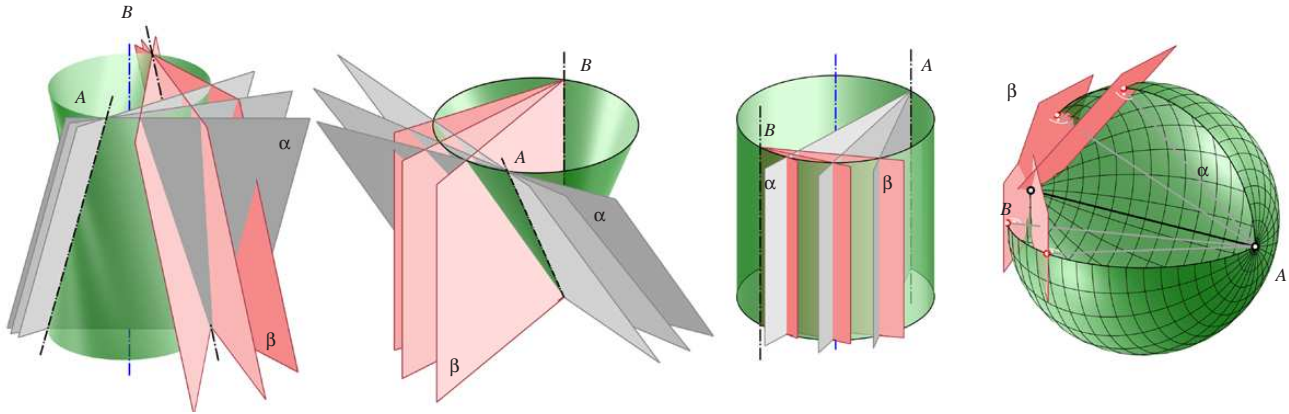


Abbildung 7: Die Fälle (3D-T5): Durch orthogonale Unterraumbüschel oder Unterraumbündel erzeugten Thales-Quadriken des E^3

Bemerkung: Der orthogonale Kegel als Erzeugnis orthogonal gekoppelter Ebenenbüschel mit scheidenden Achsen kommt bereits in 3 und Abb. 3 vor. Orthogonale Hyperboloide und Kegel, sowie Drehzylinder treten als “gefährliche Flächen der Fotogrammetrie” auf: Stammen die in zwei Fotos eines Objektes erkennbaren mindestens 7 Bildpaare von Raumpunkten, die einer gefährlichen Fläche angehören, so ist die Rekonstruktion des (euklidisch ausgemessenen) Objektes nicht möglich, vgl. [8] und [16].

5 Der rechte Winkel als zerfallende Kurve 2. Ordnung

Ein Paar normaler Geraden a, b in der euklidischen Ebene p kann als “ausgeartete” gleichseitige Hyperbel aufgefasst werden und ist Asymptotenpaar eines Büschels homothetisch liegender gleichseitiger Hyperbeln. Dabei ergeben sich zwei Fragen:

- (1) Was hüllt jede der homothetisch gelegenen Hyperbeln h bei der Thales-Bewegung (T3) ein?
- (2) Welchen Zwanglauf bestimmt eine durch zwei feste Punkte A, B gleitende gleichseitige Hyperbel? Die beiden Fragestellungen werden hier nur durch zwei Figuren visualisiert (Abb. 9(a) und 9(b)), eine analytische Behandlung, die Zusammenhänge mit der Ellipsenbewegung offenbart, unterbleibt hier jedoch.

6 Die Punkte A und B als singuläre Kurve 2. Klasse; orthoptische Linien

Aus den Punkten des Thales-Kreises k sieht man die Strecke $[A, B]$ unter festem (rechten) Winkel, k ist also eine spezielle *isoptische Linie* für diese Strecke. Fasst man nun

das Punktepaar (A, B) als singuläre Kurve 2.Klasse auf, die z.B. in eine konfokale Schar von Ellipsen eingebettet gedacht werden kann, so ist die Frage nahe liegend, welche isoptischen Linien bei Kegelschnitten auftreten, wenn wir als Sichtwinkel stets einen rechten Winkel fordern. (Solche $\alpha = 90^\circ$ - isoptische Linien werden üblicherweise “orthoptische Linien” genannt. Für die Begriffsbildung “isoptisch” und “orthoptisch” vgl. [17] und [18].) Es zeigt sich – und dies ist ein altbekanntes Ergebnis –, dass die orthoptischen Linien von Mittelpunktskegelschnitten Kreise sind; für Parabeln ergibt sich deren Leitgerade als orthoptische Linie, vgl. Abb. 10.

Natürlich kann man die Punkte A, B für sich und unabhängig voneinander zu Kurven verallgemeinern und auf diesen Kurven a und b einen Rechtwinkelhaken “reiten” lassen. Der Scheitel S dieses Hakens durchläuft dabei die orthoptische Linie des Kurvenpaares (a, b) . Bleibt A ein Punkt, so entsteht die Fußpunktskurve von b bezüglich A als Pol. Abb. 8 zeigt Spezialfälle, wenn a und b kreis- oder punktförmig angenommen sind.

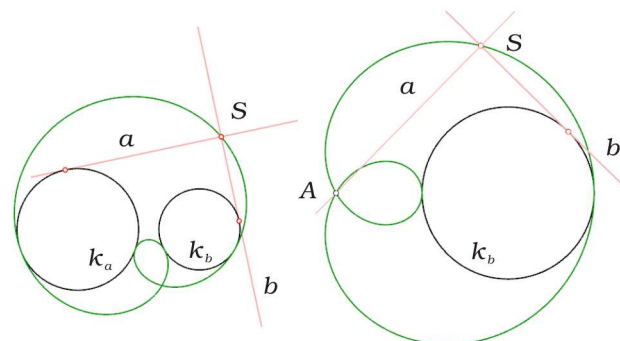
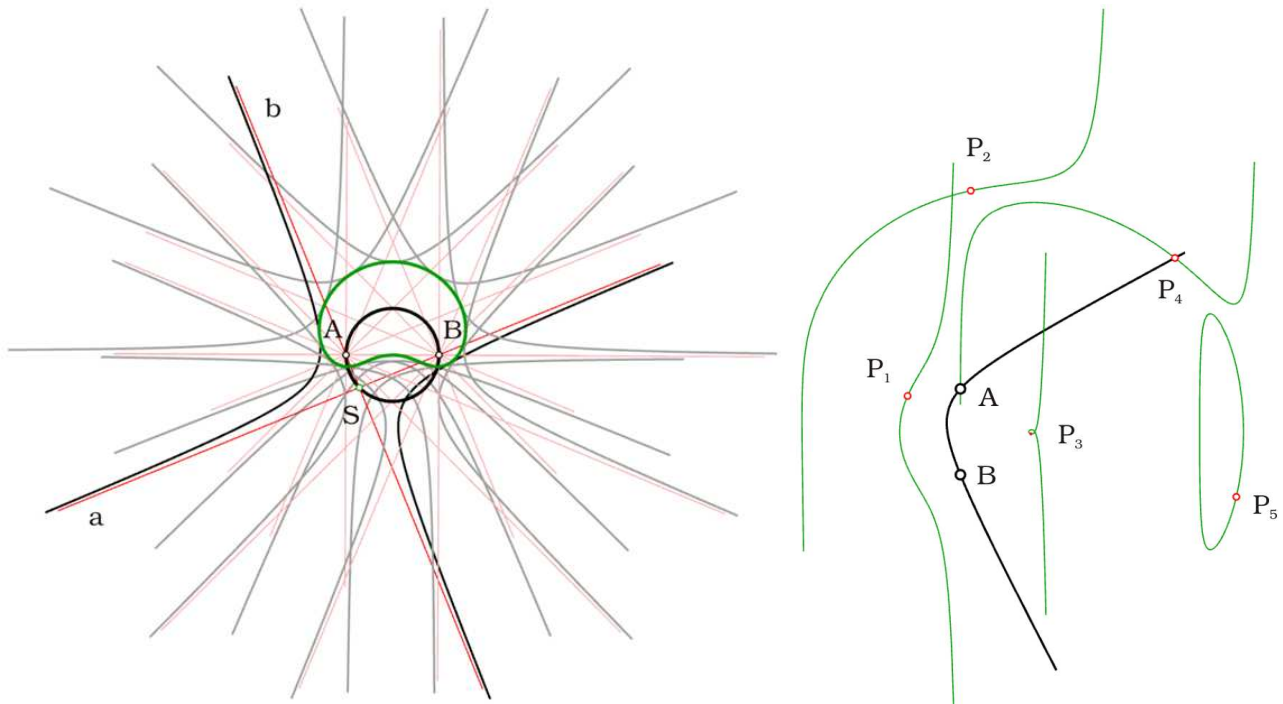


Abbildung 8: Orthoptische Linie eines Kreispaares und allgem. Fusspunktskurve eines Kreises.



(a) Hüllgebilde einer mit (S, a, b) homothetischen Hyperbel h beim Thales-Zwanglauf (T3) (b) Bahn(en) des Mittelpunktes und verschiedener allgemeiner Punkte P_i beim Zwanglauf einer durch zwei Punkte gleitenden gleichseitigen Hyperbel

Abbildung 9: Der rechte Winkel aufgefasst als Asymptoten gleichseitiger Hyperbeln

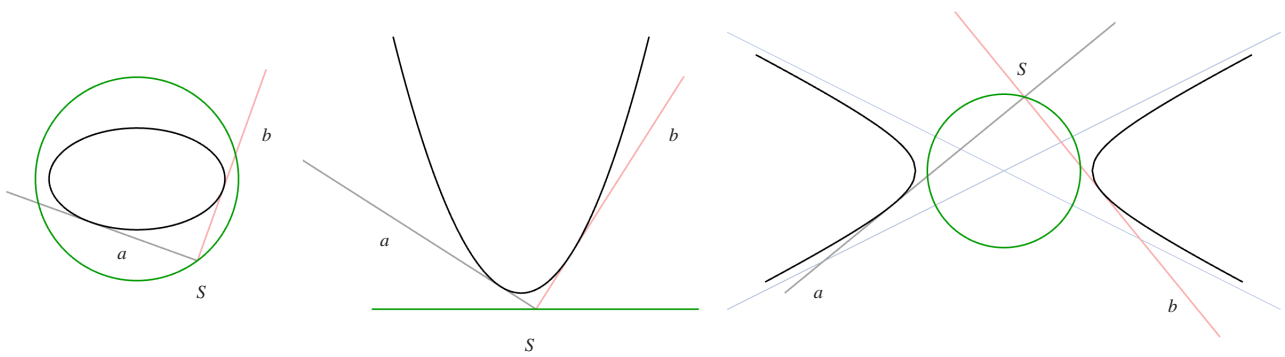


Abbildung 10: Orthoptische Linie einer Ellipse, einer Parabel und einer Hyperbel

7 Höherdimensionale Analoga der Rechtwinkeligkeit

Wir suchen nach “vernünftigen” Verallgemeinerungen eines rechten Winkels bzw. eines Winkels vom Maß $\pi/2$, (also einem Viertel des Vollkreisumfangs). Einem rechten Winkel höherdimensional analog ist ein n -Bein aus paarweise orthogonalen (Halb-)Geraden. Dagegen könnte man (im Fall der Dimension 3), jedes Dreikant mit (sphärischem) Eckenwinkelmaß $\pi/2$ als Analogon eines ebenen Winkels vom Maß $\pi/2$ auffassen. Es gibt also im E^3 bis auf Bewegungen eine zweiparametrische Menge solcher $\pi/2$ -Dreikante.

Einen anderen Verallgemeinerungsweg betreten wir, wenn wir im Sinne von 4. $\{a, b\}$ als niedrigstdimensionalen Fall eines quadratischen Kegels Γ auffassen. Um ihn mit der Orthogonalität zu verbinden, möge man sich der “Spur-0-Kegel” erinnern. Das sind elliptische Kegel mit einer Gleichung in projektiven Koordinaten derart, dass die zugehörige symmetrische Bilinearform auf eine (singuläre) symmetrische (4×4) -Matrix mit der Hauptdiagonalglieder-Summe 0, also der Spur 0 führt. Die kennzeichnende geometrische Eigenschaft dieser Kegel ist die, dass auf ihnen eine stetige Schar orthogonaler Dreibeine aus Kegelerzeugenden existiert (vgl. [12], [6]). Ein orthogonales Dreibein aus Erzeugenden lässt sich also längs Γ herum bewegen. Ein triviales Beispiel eines solchen Kegels ist der die Kanten einer Würfecke enthaltende Drehkegel. Hat der Basiskreis eines solchen Drehkegels den Radius 1, so ist seine Höhe $1/\sqrt{2}$.

Bemerkung: Für höhere Dimension d ergibt sich eine Höhe von $1/\sqrt{d-1}$ über der Mitte der Leitsphäre K^{d-2} vom Radius 1, wie man unter Zuhilfenahme der Maßverhältnisse beim Hyperwürfel unschwer ableitet. Sinngemäß müssen wir nun auch das Punktepaar A, B als niedrigstdimensionalen Kreis auffassen, der nun “Leitkreis” für einen Spur-0-Kegel zu sein hat. Es ergibt sich folgender verallgemeinernder Sachverhalt:

(3D-T1) Die durch einen Kreis k legbaren Spur-0-Kegel haben Spitzen, die einem abgeplatteten Drehellipsoid mit dem Achsenverhältnis $\sqrt{2} : 1$ angehören, welches k zum Äquatorkreis hat.

Denkt man sich Γ durch ein konkret gegebenes orthogonales Dreibein erzeugt, so ergibt sich folgende Formulierung, vgl. Abb. 11, sowie [2] und [10]:

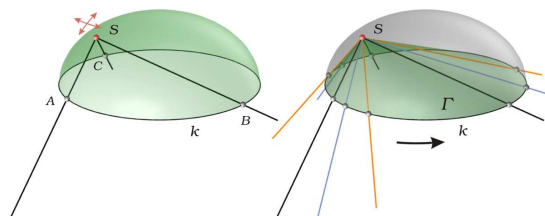


Abbildung 11: Dreiparam. Beweglichkeit eines orthogonalen Dreibeins längs eines festen Kreises k : Drehellipsoid als zweidimensionaler Scheitelort S plus einparam. Bewegung längs orthogonalem Kegel $\Gamma = S \vee k$.

(3D-T3) Treffen die Schenkel eines orthogonalen Dreibeins stets einen Kreis k , so erfüllen die Scheitel S der so erklärten 3-parametrischen (!) Menge von Dreibeinen eine Fläche, nämlich ein abgeplattetes Drehellipsoid mit dem Achsenverhältnis $\sqrt{2} : 1$, welches k zum Äquatorkreis hat.

Diese Aussage ist zunächst unerwartet, bestimmt der beschriebene Zwangslauf doch eine dreiparametrische Dreibeinmenge. Erstaunlicherweise lässt sich der Beweis mit Mitteln der Elementargeometrie führen, wobei Eigenschaften der Euler-Geraden und der Satz vom Normalriss eines Rechten Winkels zur Anwendung kommen.

Der folgende, von [2] in Details abweichende elementargeometrische Beweis gliedert sich in drei Schritte:

- die Festlegung eines Treffpunktedreiecks des Dreibeins $\{S; a, b, c\}$ mit k zu (in der Kreisebene) gewähltem Grundriss S' des Scheitels S und gewähltem Punkt $C \in k$ des Dreibeinschenkels c ,
- die Bestimmung der einparametrischen Menge von Treffpunktedreiecken zu festem Scheitelgrundriss S' , die wegen (3D-T1) erwartungsgemäß den selben Scheitel S haben; wobei also zu zeigen ist, dass bei verschiedener Wahl von C die zugehörigen Scheitel S die selbe Höhe über der Kreisebene haben, und
- gezeigt werden muss, dass der sicher drehsymmetrische Ort der Scheitel S eine Meridianellipse der in (3D-T3) behaupteten Gestalt hat.

Zu a): Bezeichnen A, B, C die Treffpunkte der Schenkel des Ortho-3-Beins, so ergibt sich nach dem “Satz vom Rechtwinkeltbild”, nach dem sich jede Ebenenormale im Normalriss orthogonal zur Ebenenspur abbildet, dass der Grundriss S' des Scheitels S stets in den Höhenschnittpunkt von $\triangle ABC$ fällt. Vom Dreieck $\triangle ABC$ kennt man also einerseits den Umkreis samt Mittelpunkt M und den Höhenschnittpunkt S' , somit die Euler-Gerade e und den Schwerpunkt $G \in e$ mit $\overline{MG} = 2\overline{GS'}$. Zu beliebig, aber nicht auf e gewählter Ecke $C \in k$ ist somit $CS' = h_c$ eine Dreieckshöhe,

zu der die durch M gehende Mittelsenkrechte m_c der Seite $c := [A, B]$ parallel sein muss; $CG =: s_c$ ist eine Schwerlinie. Sie trifft m_c im Seitenmittelpunkt C^* von c und c ist damit als Normale zu m_c durch C^* festgelegt. Die Seitengerade c trifft k in den gesuchten Treffpunkten A und B , vgl. Abb. 12 (links).

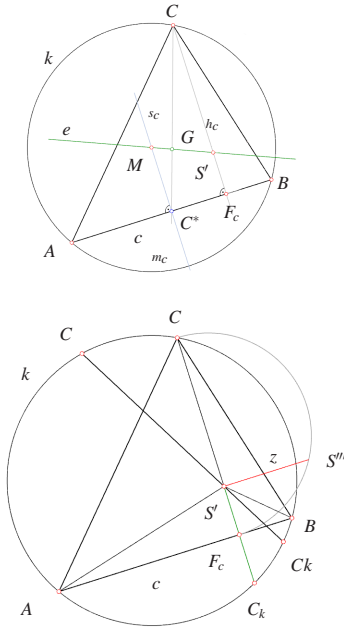


Abbildung 12: Skizzen zum Beweis a) und b)

Zu b): Um die Höhe von S über der Ebene π von k zu bestimmen, verwenden wir $CS'S$ als Seitenriss-Ebene. (Den in dieser Ebene liegenden Höhenfußpunkt $c \cap h_c$ bezeichnen wir mit F_c .) In diesem Seitenriss erscheint das sicher rechtwinkelige Dreieck ΔCSF_c unverzerrt und wir lesen nach dem Höhensatz für rechtwinkelige Dreiecke ab:

$$\overline{S'S^2} = \overline{S'C} \cdot \overline{S'F_c}. \quad (3)$$

Nun schneidet h_c den Umkreis k von ΔABC noch in einem Punkt C_k , für den bekanntlich gilt:

$$\overline{F_cS'} = \overline{F_cC_k}, \quad (4)$$

sodass damit folgt:

$$\overline{S'S^2} = \frac{1}{2} \overline{S'C} \cdot \overline{S'C_k}. \quad (5)$$

Der Sehnensatz für (k, S') besagt nun aber, dass

$$\overline{S'C} \cdot \overline{S'C_k} = \text{const.} \quad (6)$$

für jede Wahl von C auf k ist. Demnach muss auch $\overline{S'S^2}$ einen von C unabhängigen festen Wert haben, vgl. Abb. 12 (rechts).

Zu c): Für den Nachweis, dass der wegen b) nur zwei-dimensionale Scheitelort ein abgeplattetes Drehellipsoid Φ ist, verfolgen wir einen Meridian m von Φ , indem wir von fest gewähltem C auf k ausgehen und S' auf der Verbindungsline CM wählen. Damit muss ΔABC ein gleichschenkliges Dreieck sein. Zu jeder Wahl der Basisseite c normal $h_c = e = CM$ gehört ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ΔASB , sodass $SF_c = \frac{1}{2}AB$ sein muss, (F_c bezeichnet wieder den Höhenfußpunkt von h_c auf c). Andererseits liegt S auf dem Thaleskreis über $[CF_c]$, da auch das Dreieck ΔCSF_c rechtwinklig ist, vgl. Abb.13.

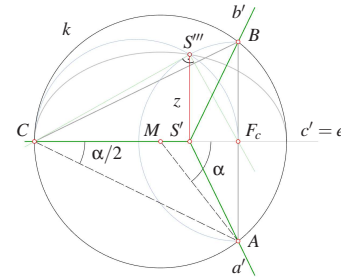


Abbildung 13: Skizze zum Beweis c)

Mit $\alpha := \sphericalangle AMF_c$ besitzt es die Kathetenlängen

$$\overline{S'F_c} = \sin \alpha \text{ und } \overline{S'C} = \cos \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha), \quad (7)$$

wobei wir für den Radius von k o.B.d.A. den Wert 1 verwenden. Für den Normalriss $S' \in CM$ ergibt sich demnach in Abhängigkeit von α

$$r(\alpha) = \overline{MS'} = 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha), \quad (8)$$

und die Höhe z von S berechnet sich zu

$$z(\alpha) = \overline{S'S} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha), \quad (9)$$

sodass $(r(\alpha), z(\alpha))$ die Ellipsengleichung

$$\frac{r^2}{1} + \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 1 \quad (10)$$

erfüllt.

□

Bemerkung: Obschon der Sachverhalt (3D-T3) durch die Aussagen zu (3D-T1) mit erledigt ist, scheint der elementargeometrische Beweis von Interesse zu sein, sind doch die benutzten Werkzeuge im Schulstoff angesiedelt, also 'Folklore'. Er kann daher von jedem an Mathematik interessierten Laien leicht nachvollzogen werden. Der angegebene Beweis "rechtfertigt" auch die Tradierung elementargeometrischer Sätze als ein seltenes Beispiel für die Verwendung der Euler-Geraden als Beweishilfsmittel!

8 Umstülpung des Würfels nach P. Schatz

In [9] findet sich auf Seite 37 im Zusammenhang mit der Umstülpung des Würfels (siehe Abb. 14) die Formulierung “Es erfolgt übrigens die Bezeichnung des umstülpbaren Würfels als “rechtwinkliges Sechsfach” in Anbetracht seines Verhältnisses zur Umkugel, dem im Zweidimensionalen das Verhältnis des rechtwinkligen Dreiecks zum Kreis entspricht.”

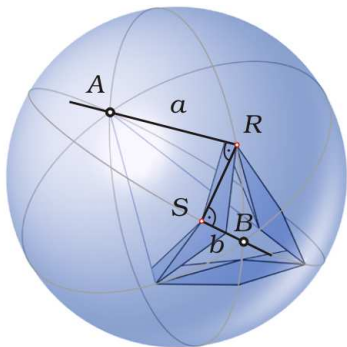


Abbildung 14: Vom Würfel abgeleitete umstülpbare Tetraederkette von P. Schatz (vgl. auch [20]).

Man könnte also meinen, auch hier eine räumliche Verallgemeinerung des Satzes von Thales vorzufinden. Der Umstülpvorgang ändert aber den Radius der Umkugel des Sechsfachs. Dennoch lässt sich eine Thales-Bewegung extrahieren, wenn man den Bewegungsvorgang eines der Tetraeder der sechsgliedrigen Schatzschen Kette von Abb. 14 für sich studiert. Dabei wird das Tetraeder auf die drei aufeinander folgenden Rechtwinkelhaken reduziert, die mit den Schenkeln a, b durch feste Punkte A, B gleiten sollen (Abb. 15). Wir fragen nach der Menge von Geraden, die die Gemeinnormale c der zueinander normalen Geraden a und b durchläuft. Diese Geradenmenge besteht aus Drehreguli (also einer Erzeugendenschar von Drehhyperboloiden) mit der gemeinsamen Achse AB . Andererseits ist auch ein Bewegungsvorgang denkbar, der c nur parallel verschiebt und einen Thales-Zylinder erzeugt. Damit berühren alle möglichen Geraden c eine mit der Thales-Kugel über AB konzentrische Kugel und schließen mit AB konstanten Winkel ein. Die Menge c ist also eine Geradenkongruenz, die als Schnitt eines Kugeltangentenkomplexes und des Treffgeradenkomplexes eines Fernkreises entsteht. (Für diese der Liniengeometrie entstammende Begriffswelt siehe z.B [7].)

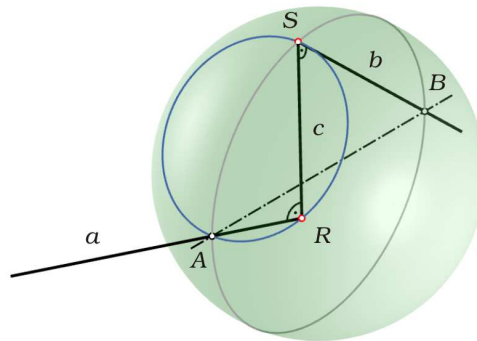


Abbildung 15: Räumlicher Rechtwinkelhaken $aRcSb$ dessen Schenkel a und b durch die festen Punkte A und B gleiten.

9 Weitere Analoga zum Satz von Thales

Von den bisherigen Verallgemeinerungen ausgehend lassen sich weitere Verallgemeinerungslinien eröffnen. Zum Beispiel erlaubt der Begriff der Fußpunktskurve nahe liegende räumliche Verallgemeinerungen im Sinne eines Thales-Satzes, wenn man nur die Schenkel a, b des ursprünglichen Rechtwinkelhakens durch zwei total-orthogonale Unterräume ersetzt, die ihrerseits zwei Steuerflächen oder -kurven berühren oder durch Punkte A, B hindurchgehen. Der Fall der durch orthogonale Geraden- und Ebenenbündel erzeugten Thales-Kugel von Abb. 7 gehört beispielsweise hierher.

Es ist unmittelbar einsichtig, dass das ebene Problem orthoptischer Kurven, wie es in Kapitel 6 behandelt wurde, auf zwei Arten in den Raum zu übertragen ist:

(3D-T3a) Gesucht ist der Ort der Scheitel eines orthogonalen Dreibeins, dessen Schenkel drei Steuerflächen berühren, wobei die Steuerflächen zusammenfallen oder auch zu Kurven oder Punkten ausarten können.

(3D-T3b) Gesucht ist der Scheitel eines orthogonalen Dreiflachs, dessen Ebenen drei Steuerflächen berühren, wobei die Steuerflächen zusammenfallen oder auch zu Kurven oder Punkten ausarten können.

(3D-T3a) soll durch das folgende Beispiel illustriert werden: Gesucht ist der Ort der Scheitel S orthogonaler Dreibeine (S, a, b, c) , deren Schenkel drei nicht notwendig windschiefe Steuergeraden p, q, r treffen. Jeder nicht durch eine Steuergerade gehende ebene Schnitt der drei Steuergeraden gibt Anlass zu einem Treffpunktdreieck ΔABC . Damit dieses das Spurpunktdreieck eines orthogonalen Dreibeins sein kann, muss es notwendig spitzwinklig ausfallen. Der Grenzfall rechtwinkliger Spurendreiecke sei zugelassen. Die Schnittebenen-Normale durch den Höhenschnittpunkt von ΔABC trägt dann zwei zur Schnittebene

symmetrisch liegende Punkte S . Dieses Punktepaar ergibt sich auch als Schnittpunktepaar der Thales-Kugeln über den Dreiecksseiten $[A, B], [B, C], [C, A]$, vgl. Abb. 16.

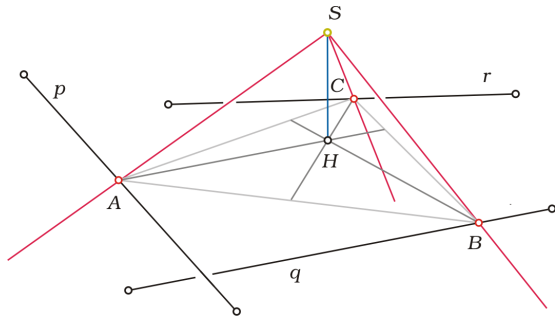


Abbildung 16: Scheitel S eines orthogonalen Dreibeins, dessen Schenkel drei Leitgeraden p, q, r treffen.

Da die Menge der Schnittebenen dreidimensional ist, haben wir von einer dreiparametrischen Menge von Dreibeinen auszugehen. Wir überlegen, dass zu jeder Lösung S eine dreidimensionale Umgebung von Lösungen S existiert. Dazu beschreiten wir einen anderen, etwas aufwändigeren Lösungsweg: Wir gehen von einem zunächst beliebig (nicht auf den Leitgeraden) gewählten Raumpunkt S als Auge einer Zentralprojektion auf eine (beliebig gewählte) Bildebene π aus. Dann ist den Zentralrissen p^c, q^c, r^c ein Dreieck ΔABC so einzuschreiben, dass der Hauptpunkt der Perspektive dessen Höhenschnittpunkt ist. Unter der (i.A.) einparametrischen Menge dieser Dreiecke finden sich zwei (im algebraischen Sinn) so, dass sich die Thales-Kugeln über den Seiten im Augpunkt schneiden. Die Beweglichkeit eines (nicht orthogonalen) Dreikants entlang dreier Geraden findet sich auch bei der von H. Stachel entdeckten Bewegungen, die die beiden Tetraeder einer Stella Octangula gegeneinander trotz Übergeschlossenheit des kinematischen Systems ausführen können, vgl. [13] und [14].

Mit diesem in Abb. 16 visualisierten Beispiel hat man in gewisser Weise auch einen ‘Satz von Thales im Linien-

raum’ behandelt. Auf die Untersuchung weiterer, liniengeometrisch motivierter Verallgemeinerungen des Satzes von Thales wird hier verzichtet.

Zur Illustration von (3D-T3b) gehen wir vom Spezialfall eines einzigen Kreises k als der (dreifachen) Steuerkurve aus und bestimmen die orthogonale Dreiflache, deren Ebenen k berühren. In gewisser Weise dual zur Aufgabe (3D-T3) gehen wir also von einem spitzwinkligen Tangendendreieck von k aus, bestimmen dessen Höhenschnittpunkt H und schneiden die Thales-Kugeln über den Dreiecksseiten, um das zum Tangendendreieck gehörige Paar von Scheiteln S möglicher Dreiflache zu gewinnen, vgl. Abb. 17.

In Abb. 17 wurde von einem (spitzwinkligen) gleichschenkligen Tangendendreieck ΔABC ausgegangen, dessen Symmetrieachse die Seite $[B, C]$ im Berührungspunkt D mit k trifft. Ist I der Mittelpunkt von k und α bzw. γ der Innenwinkel von ΔABC in A bzw. C und bezeichnet H den Höhenschnittpunkt von ΔABC , so gilt

$$\overline{DC} =: p = \cot \frac{\gamma}{2} > 1 \quad (\text{im Grenzfall } p=1),$$

$$\overline{AI} =: q = \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1}$$

$$\overline{DH} =: r = p \cdot \cot \gamma = \frac{1}{2}(p^2 - 1), \overline{IH} = 1 - r = \frac{1}{2}(3 - p^2) =: y$$

Hieraus folgt für die z -Kote des Scheitels S des Dreiflaches nach dem Höhensatz die Beziehung

$$z^2 = (q + y)r = (q + y)(1 - y) = q + y + qy - y^2,$$

sodass schließlich z und y die Gleichung

$$y^2 + z^2 = q + y - qy = 2 \frac{p^2 - 1}{p^2 - 1} = 2 \quad (p > 1)$$

erfüllen.

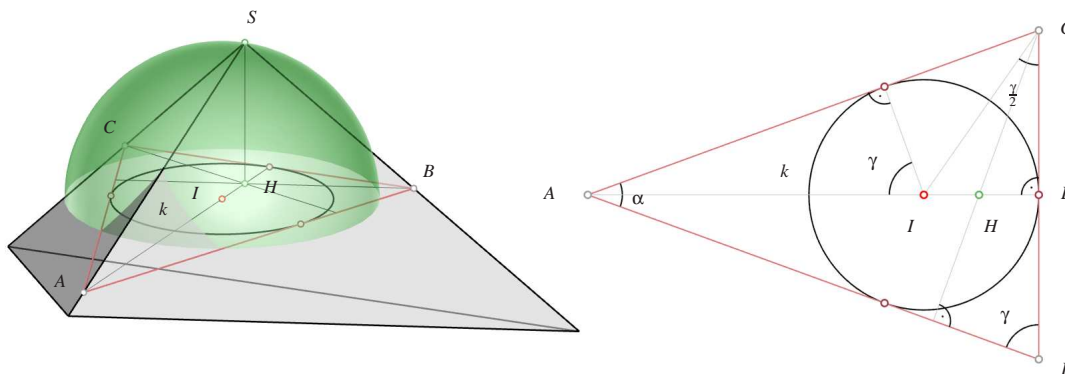


Abbildung 17: Der Scheitelort der einen Kreis k berührenden orthogonalen Dreiflache ist eine mit k konzentrische Kugel.

Wir haben noch zu zeigen, dass alle Tangendendreiecke $\{A,B,C\}$ die den selben Höhenschnittpunkt H haben, zum selben z -Wert von S führen. Die Menge dieser Tangendendreiecke sind sämtlich einer festen Ellipse e ein- und dem Kreis k umschrieben. (e und k bilden eine Angabe eines von *J-V. Poncelet* stammenden poristischen Problems der ebenen projektiven Geometrie, bei dem entweder keine oder unendlich viele Lösungen auftreten, vgl. [3] und Abb.18) Die Ellipse e ist dabei durch zwei solche Dreiecke bestimmt. Wir übergehen die diesbezüglichen Rechnungen.

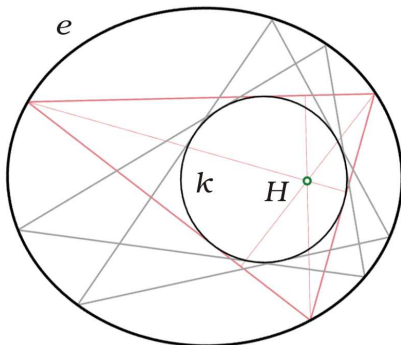


Abbildung 18: Dem Kreis k umschriebene Dreiecke mit gemeinsamem Höhenschnittpunkt H sind einer festen Ellipse e einbeschrieben.

Somit gilt der Satz

(3D-T3b) *Berühren die Ebenen eines orthogonalen Dreiflachs einen Kreis k vom Radius 1, so gehört der Scheitel des Dreiflachs einer mit k konzentrischen Kugel vom Radius $\sqrt{2}$ an.*

Für diese Aussage haben die Autoren keinen Hinweis in der Literatur gefunden. Sie lässt eine (nD-T3) analoge Dimensionsverallgemeinerung zu, die auf eine Thales-Hyperkugel vom Radius $\sqrt{n-1}$ führt.

Mit (3D-T3b) ist abschließend ein sehr natürlicher Verallgemeinerungsstrang des Satzes von Thales gefunden, der aus den Formulierungen des ursprünglichen Thales-Satzes im Sinne von Kapitel 4 folgt:

(T7) *“Fasst man das Punktepaar A,B als ausgearteten Klassenkegelschnitt (also als Tangentenmenge) auf, so liegen die Schnittpunkte S orthogonaler Tangenten auf einem Kreis, dem Thales-Kreis über $[A,B]$.”*

(3D-T7) *Fasst man einen Kreis k als ausgeartete Klassenquadrik (also als Tangentialebenenmenge) auf, so liegen die Schnittpunkte S orthogonaler Tangentialebenenripel auf einer mit k konzentrischen Kugel vom $\sqrt{2}$ -fachen des Kreisradius.*

Herrn M. Hamann verdanken die Autoren den Hinweis, dass dieser Verallgemeinerungsstrang auch die Verbin-

dung zu “dualen Holditch-Sätzen im Dreidimensionalen” im Sinne von [1] knüpft.

10 Schlussbemerkung

Wir haben einige Wege aufgezeigt, wie der Satz von Thales in allgemeinere Fragestellungen als Spezialfall eingebettet werden könnte. Obwohl dabei Vieles nur grob angerissen wurde, so wird hoffentlich dennoch zumindest die Reichhaltigkeit dieser möglichen Verallgemeinerungen sichtbar und sollte zu eigenständigem forschenden Tun anregen. Darüber hinaus sollten Prinzipien mathematischer Überlegung exemplarisch vorgestellt werden: Das Einordnen eines Sachverhaltes in ein allgemeines Schema einerseits und das Bilden von Analogien andererseits. Beide Prinzipien erfordern zwar eine gewisse Breite an mathematisch-geometrischer Grundbildung, bei in der Schule nicht gehemmter natürlicher Neugier der Schüler wird der Erwerb dieser Bildung aber zu keiner Zeit als Last empfunden. Für diese Bildungsaufgabe mag der vorliegende Text in Zusammenhang mit der Einübung einer dynamischen Graphik-Software nutzbar sein. Jedenfalls soll Schülern und Studenten mit den vorliegenden Materialien, die durch einschlägige Literatur und Internet-Recherche noch zu ergänzen sind, auch verdeutlicht werden, dass Geometrie und Mathematik entgegen landläufiger Meinung keinesfalls abgeschlossene Wissensgebiete sind!

Es sollte nicht unerwähnt bleiben, dass für den überwiegenden Teil der Figuren die programmierbare Graphics Software ‘Open Geometry GL’ (vgl. [4] und [5]) benutzt wurde.

Literatur

- [1] BROMANN, A., *Holditch's Theorem*, Math. Magazine 54 No.3 (1981).
- [2] BUBECK, H., *Auf der Suche nach einer „einfachen“ räumlichen Entsprechung zum Satz von Thales*, MNU 47/5 (1994), 264-268.
- [3] FRIEDELMEYER, J-P., *Le théorème de cloture de Poncelet comme source d'inspiration et lieu de rencontre des nouvelles methods en géométrie*, (Lumigny, 2005).
www.univ-nancy2.fr/poincare/colloques/hgmc2005/Friedel-meyer_Jean_Pierre.pdf
- [4] GLAESER, G.- STACHEL, H., *Open Geometry: Open GL + Advanced Geometry*, Springer 1999 (ISBN 0387 985999).

- [5] GLAESER, G. - SCHRÖCKER, H-P., *Handbook of Programming using Open Geometry GL*, Springer Professional Computing 2002 (ISBN 0387 95272-1).
- [6] HAVLICEK, H. - WEISS, G., *Altitudes of a Tetrahedron and Traceless Quadratic Forms*, The American Mathematical Monthly, Vol. 110, No. 8 (Oct., 2003), pp. 679-693.
- [7] HOSCHEK, J., *Liniengeometrie*, HTB, B.I. Mannheim 1971.
- [8] KRAMES J., *Über die bei der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie auftretenden 'gefährlichen' Flächen*, Bildmessung und Luftbildwesen (1942), 1-18.
- [9] SCHATZ, P., *Rythmusforschung und Technik*, Verlag freies Geistesleben, 1998. 37-38.
- [10] SCHUMANN, H., *Schulgeometrie im virtuellen Raum*, Franzbecker 2007, ISBN 978-3-88120-463-7.
- [11] SEEBACH, K., *Verallgemeinerung des Satzes von Thales auf 3 Dimensionen*, PM 34(1992), 209-212.
- [12] STACHEL, H., *A remarkable overconstrained spherical motion*, In J. Lenarcic and M. Husty (eds), *Advances in robot kinematics: analysis and control* (Salzburg, 1998), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998 (ISBN 0-7923-5169-X): pp. 287-296.
<http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel/iftom.pdf>
- [13] STACHEL, H., *Ein bewegliches Tetraederpaar*, Elem. D. Math. 43 (1988), 65-75.
- [14] STACHEL, H., *Zwei bemerkenswerte bewegliche Strukturen*, J. Geom. 43 (1992), 14-21.
- [15] STEINER TH.,
<http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Mandate2006.png>
- [16] WUNDERLICH, W., *Zur Eindeutigkeitsfrage der Hauptaufgabe der Photogrammetrie*, Monatshefte Math.Phys. 50 (1941), 151-184.
- [17] WUNDERLICH, W., *Kurven mit isoptischem Kreis*, Aequationes math. 6 (1971), 71-81.
- [18] WUNDERLICH, W., *Die isoptischen Kurven von Zykloiden*, Z.Angew.Math.Mech. 17 (1937), 56.
- [19] http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Thales
- [20] ZAHAUREK, F., *Der umstülpbare Würfel nach Paul Schatz*, 1999,
<http://www.fzk.at/wuerfel/index.html>

Gunter Weiß

Technical University of Dresden
e-mail: Gunter.Weiss@tu-dresden.de

Franz Gruber

University of Applied Arts Vienna
e-mail: Franz.Grubert@uni-ak.ac.at